# TRIGONOMETRIA

## INTRODUÇÃO

A **trigonometria** é uma **ferramenta matemática** aplicada à geometria. Ela foi originalmente desenvolvida para estudos em Astronomia, passando seu uso à Arquitetura, Navegação, Engenharia etc. Ela serve para determinar distâncias que não podiam ser medidas. A palavra trigonometria vem do grego: *tri* = três, *gono* = ângulo, *metria* = medida. **Ela dá as relações entre os ângulos e os lados de um triângulo**. No caso específico de um triângulo retângulo, um dos ângulos vale 90º. Por exemplo, 90º é o ângulo entre a linha de fundo e a linha lateral do campo de futebol, onde fica o poste da bandeirinha, como ilustra a Fig. 1.

## Unidades de medida de ângulo: grau e radiano

Perceba que, para medir a relação entre duas linhas do campo, em vez de usarmos a distância em metros, falamos que o ângulo entre elas é de 90º (90 graus). **Grau** é uma das unidades utilizadas para medir ângulos e é representado pelo símbolo (º). Lembre-se de que 360º significa uma volta completa e 180º, meia volta. Outra unidade para medir ângulos é o **radiano**, representado por (**rad**). A origem do radiano baseia-se na descoberta feita pelos gregos antigos de que a razão entre o perímetro de uma circunferência e o diâmetro dessa circunferência é sempre o mesmo número: pi = $\pi$.

Isto é:

$2\pi r/d = 2\pi r/2r = \pi$

$r$: é o raio da circunferência

$d$: é o diâmetro da circunferência = $2r$

O número $\pi$ não é inteiro; seu valor é um pouco maior que 3 e menor que 4: 3,141592653589... (e esses algarismos nunca acabam, não se repetem, pois $\pi$ é um número irracional). O ângulo com 1 radiano é o ângulo formado entre dois raios de uma circunferência quando esses raios estão separados por um arco com o mesmo comprimento de um raio (ver Fig. 2). Em uma volta completa, há 2 $\pi$ radianos e em meia volta, $\pi$ radianos.

A relação entre grau e radiano pode ser obtida por meio da regra de três:

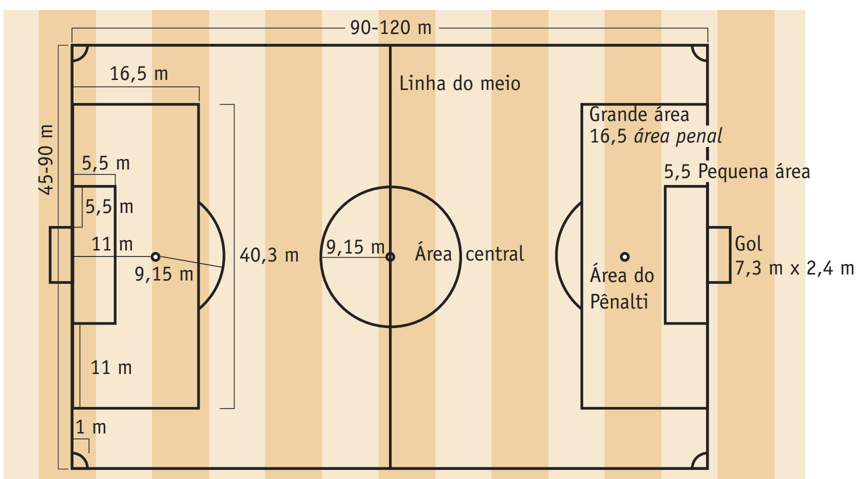


**Fig. 1** Campo de futebol, com quatro ângulos de 90º nos quatro cantos do campo



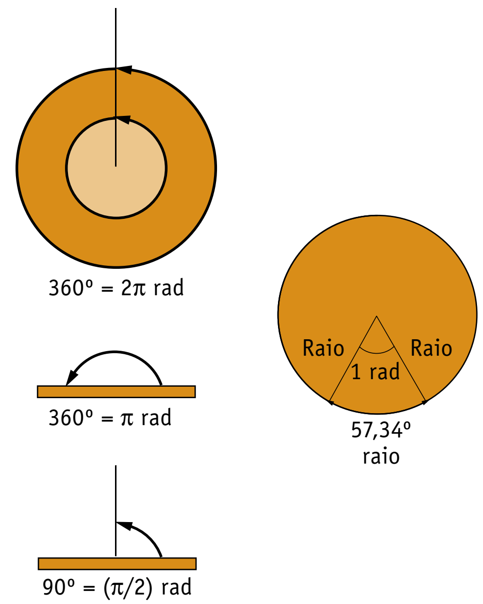


**Fig. 2** Relação entre graus e radianos

$2\pi$ rad (aqui se usa, para $\pi$, o valor numérico aproximado de 3,14) equivalem a 360º. Portanto:

6,28 rad $\rightarrow$ 360º

1,0 rad $\rightarrow x$

$x$ = 360/6,28 = 57,34º

## Relações entre os ângulos de um triângulo retângulo

As relações entre um dos ângulos do triângulo retângulo e seus três lados são mostradas na Fig. 3. Se o ângulo de um dos lados do triângulo é alfa ($\alpha$), o lado oposto a esse ângulo é chamado de cateto oposto ($a$), e o lado próximo ao ângulo $\alpha$ é chamado de cateto adjacente ($b$). O lado que sobrou é o maior dos lados do triângulo e é chamado de hipotenusa ($c$). Da trigonometria, sabemos que esses lados e o ângulo $\alpha$ estão relacionados pelas expressões mostradas na Fig. 3.

sen$\alpha$ = cateto oposto/hipotenusa

cos$\alpha$ = cateto adjacente/hipotenusa

tg$\alpha$ = cateto oposto/cateto adjacente

Valores em graus e radianos do seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg) para alguns ângulos são mostrados na Tab. 1. Observe que os valores de sen e cos variam entre +1 e -1 e não possuem unidade.

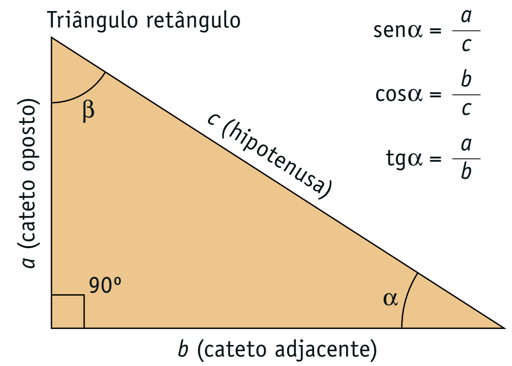


**Fig. 3** Triângulo retângulo com relações trigonométricas

**Tab. 1** Valores de seno, cosseno e tangente para alguns ângulos

| | 0º<br>0 rad | 30º<br>$\pi/6$ rad | 45º<br>$\pi/4$ rad | 60º<br>$\pi/3$ rad | 90º<br>$\pi/2$ rad | 180º<br>$\pi$ rad | 270º<br>$3\pi/2$ rad | 360º<br>$2\pi$ rad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0,5 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| sen | 0 | 0,5 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| tg | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | 0 | - | 0 |

Se considerarmos o ângulo β, o lado *a* será o cateto adjacente a esse ângulo e o lado *b*, o cateto oposto.

## Exemplo:

Um artilheiro está a 20 m do gol, cuja altura é de 2 m, como mostra a Fig. 4. Podemos calcular o ângulo α com que ele deve chutar a bola (sem efeito) para que ela entre no gol.

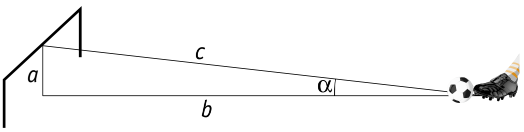


**Fig. 4** Chute de um jogador de futebol ao gol, em que *a* é a altura do gol. A figura não está em escala

## Resolução

Para calcular α, usamos: tgα = *a*/*b* = 2/20 = 0,1.

As maquininhas calculadoras fornecem que α = 5,7º, que é um ângulo muito pequeno, e para a bola entrar no gol, o artilheiro deve chutá-la de modo que o ângulo com a horizontal seja menor que 5,7º. Caso contrário, a bola sai voando por cima do gol.

## Equação fundamental da trigonometria

**A equação fundamental da trigonometria é:**

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Para obtê-la, vamos usar o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo da Fig. 3: $a^2 + b^2 = c^2$, e substituindo por:
$a = c\,\text{sen}\alpha$ e $b = c\cos\alpha$ na Eq. de Pitágoras, obtemos:

$$c^2\text{sen}^2\alpha + c^2\cos^2\alpha = c^2$$

Eliminando $c^2$, obtemos a Eq. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

## Algumas outras relações trigonométricas importantes são:

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$
$\text{sen}(\alpha\pm\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \text{senâ}\cos\alpha$
$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$
$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

## Triângulos não retângulos

A Fig. 5 mostra um triângulo qualquer típico.

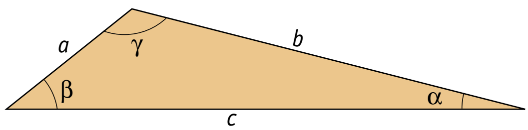


**Fig. 5** Um triângulo típico

Nesse caso, em que não há um ângulo de 90º, as relações trigonométricas são:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} = \frac{\text{sen}\gamma}{c}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Se o ângulo γ for igual a 90º, o triângulo será retângulo, e como cos90º = 0, obtemos o Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$